Mittwoch, 15. Juli 2009

Aufgabe 1. Es seien n und k positive ganze Zahlen mit $k \geq 2$. Ferner seien $a_1, \ldots, a_k$ paarweise verschiedene ganze Zahlen aus der Menge $\{1, \ldots, n\}$ derart, dass n die Zahl $a_i(a_{i+1} - 1)$ für jedes $i = 1, \ldots, k-1$ teilt. Man zeige, dass dann n die Zahl $a_k(a_1 - 1)$ nicht teilt.

Aufgabe 2. Es sei ABC ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. Es seien P und Q innere Punkte der Seiten CA und AB. Ferner seien K, L und M die Mittelpunkte der Strecken BP, CQ bzw. PQ. Der Kreis Γ gehe durch K, L und M. Die Gerade PQ sei Tangente an den Kreis Γ. Man zeige, dass $|OP| = |OQ|$ gilt.

Aufgabe 3. Es sei $s_1, s_2, s_3, \ldots$ eine streng monoton wachsende Folge positiver ganzer Zahlen derart, dass die beiden Teilfolgen

$$s_{s_1},\ s_{s_2},\ s_{s_3},\ \ldots \quad \text{und } s_{s_1+1},\ s_{s_2+1},\ s_{s_3+1},\ \ldots$$

jeweils arithmetische Folgen sind. Man zeige, dass $s_1, s_2, s_3, \ldots$ ebenfalls eine arithmetische Folge ist.

Zeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden
Bei jeder Aufgabe sind 7 Punkte erreichbar.

Donnerstag, 16. Juli 2009

Aufgabe 4. Es sei ABC ein Dreieck mit $|AB| = |AC|$. Die Innenwinkelhalbierenden der Winkel BAC und CBA schneiden die Seiten BC und AC in den Punkten D bzw. E. Es sei K der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ADC. Ferner sei $\sphericalangle BEK = 45°$. Man bestimme alle möglichen Werte von $\sphericalangle BAC$.

Aufgabe 5. Man bestimme alle Funktionen f, die auf der Menge der positiven ganzen Zahlen definiert sind und nur positive ganze Zahlen als Werte annehmen, so dass es für alle positiven ganzen Zahlen a und b ein nicht entartetes Dreieck mit Seitenlängen

$$a, \ f(b) \text{ und } f(b + f(a) - 1)$$

gibt.
(Ein Dreieck heißt *nicht entartet*, wenn seine Eckpunkte nicht kollinear sind.)

Aufgabe 6. Es seien n eine positive ganze Zahl, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ paarweise verschiedene positive ganze Zahlen und M eine Menge von $n-1$ positiven ganzen Zahlen, die nicht die Summe $s = a_1+a_2+\ldots+a_n$ als Element enthält. Ein Grashüpfer springt längs der reellen Zahlengerade. Er startet im Nullpunkt und vollführt n Sprünge nach rechts mit Längen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in beliebiger Reihenfolge. Man zeige, dass der Grashüpfer seine Sprünge so anordnen kann, dass er nie auf einem Punkt aus M landet.

Zeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden
Bei jeder Aufgabe sind 7 Punkte erreichbar.